UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

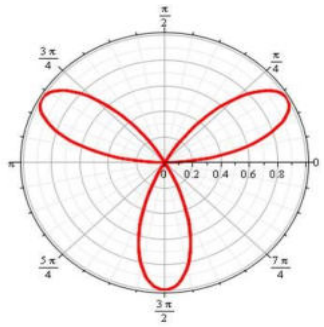
CP-II, Semestre 4	Examen d'Analyse 4	Année 2018/2019
11 juin 2019 11 يونيو	durée : 2h.	**Prof: F.MORADI**

N.B: il sera tenu compte de la **Rédaction** et de la **Clarté** de la **Réponse** "RCR".

	Exercice 1: (8,5 points)
	Considérons la fonction f définie pour $(x,t)\epsilon(]0,+\infty[)^2$ *par :* $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$.
1	1- *Montrer que f est de classe* C^1 *sur* $(]0,+\infty[)^2$.
1,5	2- *Calculer* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$.
1	3- *Montrer que:* $\forall x \in]0,1] : \|f(x,t)\| \leq \frac{1}{t^{1-x}}$ *Et en déduire que :* $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* $]0,1]$.
1	4- *Montrer que:* $lim_{t\to+\infty} t^2 f(x,t) = 0$ *Et en déduire que :* $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$.
	5- *Soit pour* $x\epsilon]0,+\infty[$: $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.
1	a- *Par une intégration par parties, établir l'égalité suivante :* $F(x+1) = xF(x)$.
1,5	b- *Montrer que :* $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *et en déduire la valeur de* $F\left(\frac{1}{2}\right)$.
1,5	6- *Soit* $G(x) = \int_x^{x^2} e^{-t}t^{x-1}dt$ *avec* $x > 0$. *Montrer que G est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et calculer* $G'(x)$.

Exercice 2: (4 points)

A) Considérons un cercle (C) de rayon 1 et une rosace à trois branches d'équation polaire : $r = sin(3\theta)$.



1pt 1- Calculer l'aire intérieure à la rosace

1pt 2- En déduire l'aire du domaine intérieur au cercle (C) et extérieur à la rosace.

2pt B) Calculer le volume du domaine :

$$D = \{(x,y,z): x \geq 0, y \geq 0, z \leq 5, x - y + z \geq 1 \quad et \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Exercice 3 : (7.5 points)

A) Considérons la forme différentielle :

$$\omega(x,y) = 2xe^{x^2-y}\,dx - 2e^{x^2-y}\,dy.$$

0.5pt 1- Montrer que ω n'est pas exacte.

1pt 2- Trouver $\psi(x)$ telle que : $\psi(x)\omega$ soit exacte.

1pt 3- Déterminer une fonction f telle que : $\psi(x)\omega = df$.

1pt 4- En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $\oint_{\Gamma} \omega$ où Γ est le bord du carré $[0,1] \times [0,1]$ parcouru dans le sens trigonométrique.

1pt 5- Calculer : $\oint_{\Gamma} \psi(x)\omega$.

B) On considère le champ vectoriel : $\vec{V}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.

1pt 1- Calculer $\overrightarrow{rot}\vec{V}$.

1pt 2- Ce champ dérive-t-il d'un potentiel ?

3- Soit la forme différentielle :

$$\mu(x,y,z) = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

1pt Calculer l'intégrale de μ le long de l'hélice H paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \quad avec\ t\epsilon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ z(t) = t \end{cases}$$

BONNE FETE عيد مبارك سعيد